

# 高级算法设计与分析

## 完美匹配

夏盟佶

Xia, Mingji

中科院软件所  
计算机科学国家重点实验室

2016.6

## 积和式模2和行列式

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

- 

$$\text{Det}(A) = |A| = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- 行列式有多项式时间高斯消元算法。

- 

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- 因为 $-1 = 1 \pmod{2}$ ,  $\text{Permanent}(A) = |A| \pmod{2}$ 。

积和式模 $2^k$ 

- $\mathcal{O}(n^{4k-3})$  算法简介 ( $k \geq 1$ )。

Leslie G. Valiant: The Complexity of Computing the Permanent. Theor. Comput. Sci. 8: 189-201 (1979)

- 

$$\text{Perm} \begin{pmatrix} aA_1 + B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = a \cdot \text{Perm} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \text{Perm} \begin{pmatrix} B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

- 

$$2 \mid \text{Perm} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad 4 \mid \text{Perm} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_4 \\ A_5 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

## 积和式模 $2^k$

- $T_k(n)$ 表示计算 $n \times n$ 矩阵模 $2^k$ 的算法时间。

- 

$$T_k(n) = (n - 1) \cdot T'_k(n) + T_k(n - 1)$$

- $T'_k(n)$ 表示计算有1对相同行的 $n \times n$ 矩阵模 $2^k$ 的算法时间。
- 对两个相同行展开积和式：

$$T'_k(n) \leq n^2 \cdot T_{k-1}(n - 2)$$

- 

$$T_k(n) \leq n^3 \cdot T_{k-1}(n - 2) + T_k(n - 1)$$

- 

$$T_k(n) \leq Cn^{4k+3}$$

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- $A$ 有两种图表示： $n$ 个点的有向图，和 $2n$ 个点的偶图。

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

### 定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- $A$ 有两种图表示:  $n$ 个点的有向图, 和 $2n$ 个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$   
有向图 $G(V, E, W)$ 中, 有向边 $(j, k)$ 的权重 $W(j, k) = A_{j, k}$ 。



## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

### 定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- $A$ 有两种图表示:  $n$ 个点的有向图, 和 $2n$ 个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$   
有向图 $G(V, E, W)$ 中, 有向边 $(j, k)$ 的权重 $W(j, k) = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 $G$ 的所有圈覆盖权重之和。

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

### 定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- $A$ 有两种图表示： $n$ 个点的有向图，和 $2n$ 个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$   
有向图 $G(V, E, W)$ 中，有向边 $(j, k)$ 的权重 $W(j, k) = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 $G$ 的所有圈覆盖权重之和。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $U = \{1', 2', \dots, n'\}$ 。  
无向偶图 $H(V, U, E, W)$ 中，边 $(j, k')$ 的权重 $W(j, k') = A_{j, k}$ 。

## Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- $A$ 是 $n \times n$ 矩阵。

### 定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- $A$ 有两种图表示:  $n$ 个点的有向图, 和 $2n$ 个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$   
有向图 $G(V, E, W)$ 中, 有向边 $(j, k)$ 的权重 $W(j, k) = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 $G$ 的所有圈覆盖权重之和。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $U = \{1', 2', \dots, n'\}$ 。  
无向偶图 $H(V, U, E, W)$ 中, 边 $(j, k')$ 的权重 $W(j, k') = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 $H$ 的所有完美匹配权重之和。

# 行列式：带符号的圈覆盖与偶图完美匹配



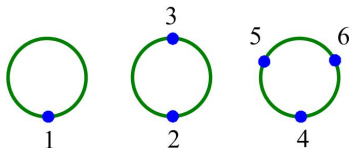
$$\pi = (1)(23)(456)$$

# 行列式：带符号的圈覆盖与偶图完美匹配

•

$$\pi = (1)(23)(456)$$

- 排列的奇偶性=偶数长度的圈的数目奇偶性。

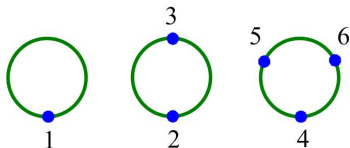


# 行列式：带符号的圈覆盖与偶图完美匹配

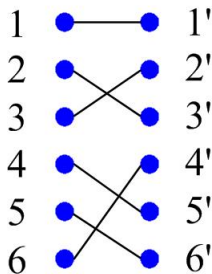
•

$$\pi = (1)(23)(456)$$

- 排列的奇偶性=偶数长度的圈的数目奇偶性。



- =偶图完美匹配中交叉数目的奇偶性



## Pfaffian: 带符号的完美匹配

- $G$ 是一个边带权重、含 $2n$ 个顶点的无向图。

## Pfaffian: 带符号的完美匹配

- $G$ 是一个边带权重、含 $2n$ 个顶点的无向图。
- 

$$\text{Pfaffian}(G) = \sum_{M \text{ 是 } G \text{ 的完美匹配}} (-1)^{M \text{ 的交叉数目}} \cdot M \text{ 的权重}$$

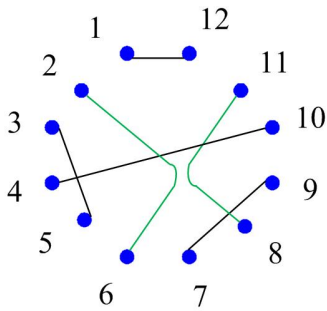
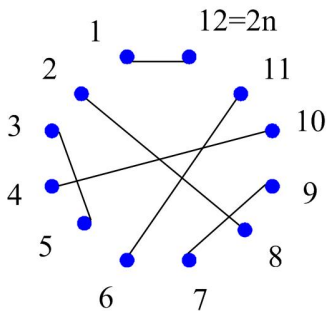


## Pfaffian: 带符号的完美匹配

- $G$ 是一个边带权重、含 $2n$ 个顶点的无向图。
- 

$$\text{Pfaffian}(G) = \sum_{M \text{ 是 } G \text{ 的完美匹配}} (-1)^{M \text{ 的交叉数目}} \cdot M \text{ 的权重}$$

- 交换匹配中两个边的匹配对象，交叉数目变1。

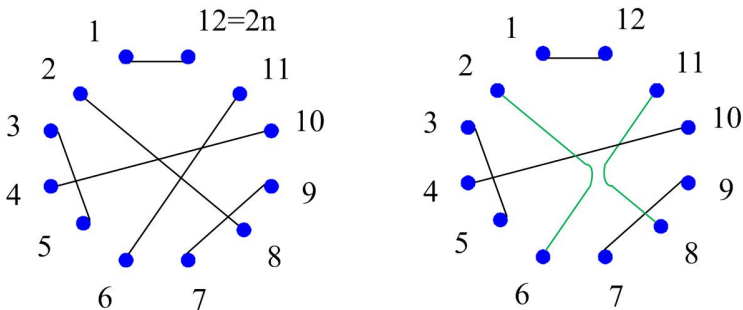


## Pfaffian: 带符号的完美匹配

- $G$ 是一个边带权重、含 $2n$ 个顶点的无向图。
- 

$$\text{Pfaffian}(G) = \sum_{M \text{ 是 } G \text{ 的完美匹配}} (-1)^{M \text{ 的交叉数目}} \cdot M \text{ 的权重}$$

- 交换匹配中两个边的匹配对象，交叉数目变1。



- 但是，交换一条匹配边的两个端点，例如4和10，交叉数目的奇偶性不变。如果这种交换也变号，就成了置换的奇偶

## 反对称矩阵的Pfaffian

- 反对称矩阵 $M$ :  $M_{j,k} = -M_{k,j}$ 。
- 奇数大小的反对称矩阵 $M$ 的Pfaffian是0; 如果是偶数 $2n$ , 定义为:

$$Pf(M) = \sum_{\pi} (-1)^{\epsilon(\pi)} M(i_1, i_2) M(i_3, i_4) \dots M(i_{2n-1}, i_{2n}),$$

其中,  $\pi = (i_1, \dots, i_{2n})$ ,  $i_1 < i_3 < \dots < i_{2n-1}$ ,  $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \dots, i_{2n-1} < i_{2n}$ 。

- Pfaffian有类似高斯消元的算法。
- 

$$Pf^2(A) = Det(A)$$

## 平面图完美匹配

- 一般图包括平面图的，带符号的完美匹配权重和，可以多项式时间内计算。
- 平面图完美匹配的多项式时间的FKT算法是如何计算的？
- 从Pfaffian的第一个定义角度说，故意给平面图的一些边的权重添加负号，使得对每个匹配，权重的新负号能和交叉数目带来的负号相消。
- 从Pfaffian的第二个定义角度说，对于一条无向边 $(j, k)$ 及其权重 $w$ ，在反对称矩阵 $M$ 中，令 $M_{j,k} = -M_{k,j} = w$ ，还是 $-M_{j,k} = M_{k,j} = w$ ，可自由选择。
- 视为无向图 $G$ 的一个边定向，取前者认为 $j \rightarrow k$ ，取后者认为 $j \leftarrow k$ 。
- 取一个适当的定向，使得 $\#\text{PerfectMatching}(G) = \text{Pf}(M)$ 。

## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。

## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。

## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。
- 

$$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \cdots)$$

$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1) \cdots)$$

## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。

- 

$$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \cdots)$$

$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1) \cdots)$$

- 定义

$$\delta = \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \cdots \\ i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_1 \cdots \end{pmatrix}$$



## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。

- 

$$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \cdots)$$

$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1) \cdots)$$

- 定义

$$\delta = \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \cdots \\ i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_1 \cdots \end{pmatrix}$$

- 

$$(-1)^{\epsilon(\pi)} (-1)^{\epsilon(\tau)} = (-1)^{\epsilon(\delta)}$$

## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。

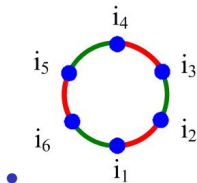
$$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \cdots)$$

$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1) \cdots)$$

- 定义

$$\delta = \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \cdots \\ i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_1 \cdots \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{\epsilon(\pi)} (-1)^{\epsilon(\tau)} = (-1)^{\epsilon(\delta)}$$



## 平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图 $G$ 的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分： $\pi$ 的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。

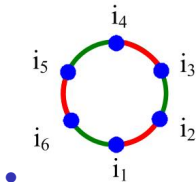
$$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \cdots)$$

$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1) \cdots)$$

- 定义

$$\delta = \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \cdots \\ i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_1 \cdots \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{\epsilon(\pi)} (-1)^{\epsilon(\tau)} = (-1)^{\epsilon(\delta)}$$



- Pfaffian Orientation: [https://en.wikipedia.org/wiki/FKT\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/FKT_algorithm)

## 匹配门

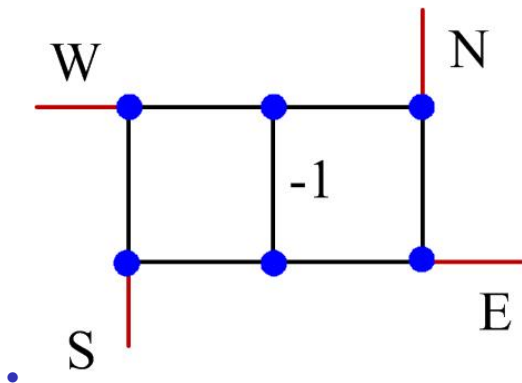
- 完美匹配就是 $[0, 1, 0, \dots, 0]$ 构成的张量网络。  
权重 $w$ 的边，本质是一个点 $[1, 0, w]$ 。

## 匹配门

- 完美匹配就是 $[0, 1, 0, \dots, 0]$ 构成的张量网络。  
权重 $w$ 的边，本质是一个点 $[1, 0, w]$ 。
- 如下张量网络（匹配门）实现了一个函数 $C(N, E, S, W)$ ，  
 $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ， $C(1, 1, 1, 1) = -1$ ，并且其他函数值都是0。

## 匹配门

- 完美匹配就是 $[0, 1, 0, \dots, 0]$ 构成的张量网络。  
权重 $w$ 的边，本质是一个点 $[1, 0, w]$ 。
- 如下张量网络（匹配门）实现了一个函数 $C(N, E, S, W)$ ，  
 $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ， $C(1, 1, 1, 1) = -1$ ，并且其他函数值都是0。



## 用平面图模拟一般图

- $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ,  $C(1, 1, 1, 1) = -1$ , 并且其他函数值都是0。

## 用平面图模拟一般图

- $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ,  $C(1, 1, 1, 1) = -1$ , 并且其他函数值都是0。
- $|C|$ 可以把一个一般图上的问题归约到平面图上的问题。



## 用平面图模拟一般图

- $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ,  $C(1, 1, 1, 1) = -1$ , 并且其他函数值都是0。
- $|C|$ 可以把一个一般图上的问题归约到平面图上的问题。
- $C$ 恰好模拟了Pfaffian中的交叉。

## 用平面图模拟一般图

- $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ,  $C(1, 1, 1, 1) = -1$ , 并且其他函数值都是0。
- $|C|$ 可以把一个一般图上的问题归约到平面图上的问题。
- $C$ 恰好模拟了Pfaffian中的交叉。

## 用平面图模拟一般图

- $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$ ,  $C(1, 1, 1, 1) = -1$ , 并且其他函数值都是0。
  - $|C|$ 可以把一个一般图上的问题归约到平面图上的问题。
  - $C$ 恰好模拟了Pfaffian中的交叉。
- 推论
- $Pfaffian$ 可以归约到平面完美匹配权重和问题。

## 匹配门等式

- 一个匹配门的函数  $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{C}$  满足如下等式。
- 对任意两个长  $n$  的串  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$ , 集合  $\{i | \alpha_i \neq \beta_i\}$  的标号从小到大记为  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ ,

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j F(\alpha \oplus e_{p_j}) F(\beta \oplus e_{p_j}) = 0$$

- 最初的证明来自 Pfaffian 的 Grassmann-Plücker 等式。

## 用封闭性证明

- 起始:  $[0, 1, 0, \dots, 0]$  满足匹配门等式。
- 平面图的一个点的边有一个自然的次序, 例如, 顺时针次序。p
- 形成平面张量网络两种运算:

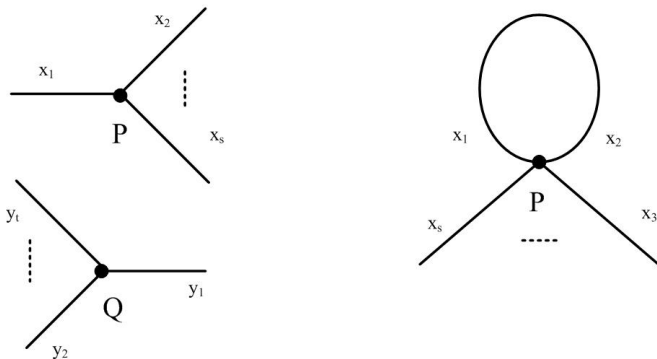


Figure: Juxtaposition and Jumper

## 在两种运算下封闭: Juxtaposition

- 

$$F(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t) = P(x_1, \dots, x_s)Q(y_1, \dots, y_t).$$

- 回想

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j F(\alpha \oplus e_{p_j}) F(\beta \oplus e_{p_j}) = 0$$

- 记为  $I(F, \alpha, \beta) = 0$ 。

- 

$$I(F, \alpha\alpha', \beta\beta') = Q(\alpha')Q(\beta')I(P, \alpha, \beta) \pm P(\alpha)P(\beta)I(Q, \alpha', \beta') = 0.$$

# Jumper

- 回想

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j F(\alpha \oplus e_{p_j}) F(\beta \oplus e_{p_j}) = 0$$

- 记为  $I(F, \alpha, \beta) = 0$ 。



$$F(x_3, \dots, x_s) = P(0, 0, x_3, \dots, x_s) + P(1, 1, x_1, \dots, x_s)$$



$$\begin{aligned} I(F, \alpha, \beta) &= I(P, 00\alpha, 00\beta) + I(P, 11\alpha, 11\beta) + \\ &\quad (I(P, 00\alpha, 11\beta) + P(10\alpha)P(01\beta) - P(01\alpha)P(10\beta)) + \\ &\quad (I(P, 11\alpha, 00\beta) + P(01\alpha)P(10\beta) - P(10\alpha)P(01\beta)) = 0 \end{aligned}$$

## 匹配门的简洁表示给出算法

- 因为匹配门 $F$ 满足匹配门等式，可以证明用 $n^2$ 个值即可存储表示一个匹配门函数。
- 已知运算前的匹配门（的表示），怎么计算运算后的匹配门（的表示）。
- 还有些细节处理。

此算法能否给出矩阵乘法的更快的算法？

在定义域大小为3的时候，有没有类似的封闭性质，有没有用于bridgeless平面图的一些封闭性质能够证明四色定理？



## 亏格

- 一个亏格为 $k$ 的曲面上的无交叉边的图，可以在 $4^k \text{poly}(n)$ 时间内计算它的完美匹配权重和。

## 完美匹配与Minor

- 一个图是平面图当且仅当它没有 $K_{3,3}$ 和 $K_5$ 作为Minor。
- 以下图集合的完美匹配权重和问题，都有多项式时间算法。
  - 没有 $K_{3,3}$ Minor
  - 没有 $K_5$ Minor
  - 没有 $H$ Minor,  $H$ 可以只用一个交叉画在平面上。
- 以不含 $K_7$ Minor的图作为实例的完美匹配权重和问题，是 $\#P$ 难的。
- 边界在哪？

## 参考文献

- <https://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian>
- Radu Curticapean: Counting perfect matchings in graphs that exclude a single-crossing minor  
<http://arxiv.org/abs/1406.4056>
- Daniel Marx: Algorithmic Graph Structure Theory  
<http://resources.mpi-inf.mpg.de/conferences/adfocs13/material.htm>

## 前四讲回顾

- 定义：  
张量网络、 $\#CSP$ 问题、SAT问题
- 二分定理（算法部分浅酌）：  
复数值域 $\#CSP(\mathcal{A})$ ，图同态，Holant问题（斐波那契门）
- 张量网络的各种例子，结合律与全息归约
- 全息归约的奇特应用：线性检测，积和式算法
- Pfaffian与平面图完美匹配